Auch zu Aufgabe 8

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist

$$X \times [0,1] \xrightarrow{f} \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$
$$(x,t) \longmapsto ((1-t)\cdot x,\ t)$$

eine Identifizierung.

Bew.: Wir benutzen den Satz, dass jede (offene oder) abgeschlossene stetige surjektive Abb. eine Identifizierung ist.

Sei $A \subseteq X \times [0,1]$ abgeschlossen. Z.z.: $f(A) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$ abgeschl.

1. Fall: $\forall (x,t) \in A$ gilt $t < 1$.

Da X kompakt ist, ist auch $X \times [0,1]$ kompakt. Abgeschlossene Mengen in kompakten Räumen sind wieder kompakt, also ist A kompakt. Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abb. sind kompakt, daher ist $pr_{[0,1]}(A) \subseteq [0,1]$ kompakt. ($pr_{[0,1]}: X \times [0,1] \to [0,1]$ die Projektion)

Im $\mathbb{R}^n$ (hier: $[0,1] \subseteq \mathbb{R}^1$) gilt: kompakt $\Longleftrightarrow$ beschränkt & abgeschlossen.

Nach Voraussetzung in diesem ersten Fall ist $1 \notin pr_{[0,1]}(A)$, also $pr_{[0,1]}(A) \subseteq [0, 1-\varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$

(ich sage hiermit nur, dass $pr_{[0,1]}(A)$ nicht ganz $[0,1)$ sein kann).

Es ist $f|_{X \times [0,1-\varepsilon]}$ ein Homöomorphismus auf (mit Inversem $(x,t) \mapsto (\frac{1}{1-t}\cdot x,\ t)$)

also ist $f(A)$ abgeschlossen in $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathbb{R}^n \times [0, 1-\varepsilon]$.

Da $\mathbb{R}^n \times [0,1-\varepsilon]$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, ist auch $f(A)$ abgeschlossen in $\mathrm{Bild}(f)$.

<u>2. Fall</u>: $\exists\, x \in X$ mit $(x,1) \in A$.

Wir zeigen, dass $\mathrm{Bild}(f) \setminus f(A)$ offen ist.

Falls $\mathrm{Bild}(f) = f(A)$ ist, ist das klar.

Andernfalls sei $(a,t) \in X \times [0,1]$ mit $f(a,t) \notin f(A)$.

Dann ist $(a,t) \notin A$. Wegen $[t = 1 \Rightarrow f(a,t) = (0,1) = f(x,1) \in f(A)]$ folgt daraus $t < 1$.

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $t + \varepsilon < 1$. Wie oben sieht man, dass

$$f|_{X \times [0,1-\varepsilon)} : X \times [0,1-\varepsilon) \longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \cap \mathbb{R}^n \times [0,1-\varepsilon)$$

ein Homöomorphismus ist. (diesmal mit halboffenem Intervall!)

Da $X \times [0,1] \setminus A$ offen ist, gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X \times [0,1-\varepsilon) \setminus A$ von (a,t).

Dann ist $f(U)$ offen in $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathbb{R} \times [0,1-\varepsilon)$, also auch offen in $\mathrm{Bild}(f)$, und es gilt $f(U) \cap f(A) = \emptyset$ und $f(a,t) \in f(U)$.

Damit haben wir eine offene Umgebung von $f(a,t)$ gefunden, die ganz in $\mathrm{Bild}(f) \setminus f(A)$ liegt.

Also ist $\mathrm{Bild}(f) \setminus f(A)$ offen, also $f(A)$ abgeschlossen. $\square$